

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>4</b>
<b>1.1</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>4</b>
1.1.1	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	4
1.1.2	Système d'équations linéaires . . . . .	5
1.1.2.1	Solutions d'un système d'équations linéaires . . . . .	5
1.1.2.2	Interprétation graphique pour $n = 2$ et $n = 3$ . . . . .	6
1.1.3	Opérations élémentaires . . . . .	9
1.1.4	Matrices, matrices échelonnées-réduites . . . . .	10
1.1.4.1	Matrices . . . . .	10
1.1.4.2	Matrices échelonnées-réduites . . . . .	12
1.1.5	L'algorithme de Gauss-Jordan . . . . .	16
1.1.6	Variables de base et variables libres . . . . .	19
1.1.7	Systèmes homogènes . . . . .	20
<b>1.2</b>	<b>Vecteurs de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>21</b>
1.2.1	Vecteurs dans le plan et l'espace . . . . .	21
1.2.2	Opérations sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	23
1.2.2.1	Addition de deux vecteurs . . . . .	23
1.2.2.2	Multiplication par un scalaire . . . . .	24
1.2.2.3	Propriétés des opérations sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	24
1.2.3	Combinaisons linéaires . . . . .	25
1.2.4	Équations vectorielles . . . . .	27
1.2.5	Génération linéaire . . . . .	27
<b>1.3</b>	<b>Équations matricielles</b>	<b>29</b>
1.3.1	Produit matrice-vecteur . . . . .	29
1.3.2	Existence de solution et nombre de solutions . . . . .	32
1.3.3	Systèmes d'équations linéaires homogènes . . . . .	34
1.3.4	Système d'équations non homogène . . . . .	36
<b>1.4</b>	<b>Bases de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>39</b>
1.4.1	Dépendance et indépendance linéaire . . . . .	39
1.4.2	Bases de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	42
<b>1.5</b>	<b>Introduction aux applications linéaires</b>	<b>44</b>
1.5.1	Introduction . . . . .	44
1.5.2	Définition . . . . .	46
1.5.3	Matrice associée . . . . .	48
1.5.4	Injectivité et surjectivité . . . . .	51

<b>2</b>	<b>Calcul matriciel</b>	<b>55</b>
2.1	Opérations matricielles . . . . .	55
2.1.1	Somme de deux matrices et multiplication par un scalaire . . . . .	55
2.1.2	Multiplication matricielle . . . . .	56
2.2	Transposée d'une matrice . . . . .	60
2.3	Matrices inversibles . . . . .	62
2.4	Matrices élémentaires . . . . .	65
2.5	Méthode de calcul de $A^{-1}$ . . . . .	66
2.6	Applications linéaires inversibles . . . . .	69
2.7	Matrices par blocs . . . . .	71
2.8	Matrices triangulaires, matrices diagonales . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Déterminant</b>	<b>77</b>
3.1	Définition . . . . .	77
3.2	Propriétés fondamentales . . . . .	80
3.3	Méthodes pratiques de calcul . . . . .	85
3.4	Inversibilité d'une matrice . . . . .	87
3.5	Interprétation géométrique du déterminant . . . . .	89
3.5.1	Rappel : aire d'un parallélogramme . . . . .	89
3.5.2	Déterminant et parallélogramme . . . . .	89
3.5.3	Déterminant et parallélépipède . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>91</b>
4.1	Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels . . . . .	91
4.1.1	Espaces vectoriels et propriétés . . . . .	91
4.1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	97
4.1.3	Indépendance linéaire . . . . .	102
4.2	Bases et dimension . . . . .	105
4.3	Noyau et image d'une matrice . . . . .	114
4.4	Rang et système d'équations linéaires . . . . .	123
4.5	Espace des lignes d'une matrice . . . . .	124
4.6	Applications linéaires . . . . .	127
4.6.1	Définition et propriétés . . . . .	127
4.6.2	Matrice associée à une application linéaire $T : V \rightarrow W$ . . . . .	128
4.6.3	Noyau et image d'une application linéaire . . . . .	135
4.6.4	Changement de base . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Valeurs propres et vecteurs propres</b>	<b>147</b>
5.1	Introduction et motivation . . . . .	147
5.2	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	148
5.2.1	Détermination des vecteurs propres . . . . .	153
5.3	Diagonalisation . . . . .	155
5.3.1	Matrices semblables . . . . .	155
5.3.2	Matrices diagonalisables . . . . .	156
5.3.3	Méthode de diagonalisation . . . . .	160
5.3.4	Exemples de diagonalisation . . . . .	160
5.4	Applications . . . . .	162
5.4.1	Calcul de puissances de matrices . . . . .	162
5.4.2	Applications géométriques . . . . .	163

5.4.3	Extension aux espaces vectoriels quelconques . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Orthogonalité et méthode des moindres carrés</b>	<b>165</b>
6.1	Introduction et motivation . . . . .	165
6.2	Produit scalaire et norme . . . . .	166
6.3	Orthogonalité . . . . .	169
6.4	Ensembles orthogonaux et bases orthogonales . . . . .	174
6.5	Projections orthogonales . . . . .	176
6.6	Matrices orthogonales . . . . .	191
6.7	Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	194
6.8	Factorisation QR . . . . .	198
6.9	La méthode des moindres carrés . . . . .	203
6.10	Angle entre deux vecteurs . . . . .	216
6.11	Espaces préhilbertiens . . . . .	218
<b>7</b>	<b>Matrices symétriques et décomposition en valeurs singulières</b>	<b>220</b>
7.1	Diagonalisation des matrices symétriques . . . . .	220
7.1.1	Orthogonalité des vecteurs propres . . . . .	220
7.1.2	Matrices orthogonales . . . . .	223
7.1.3	Diagonalisation orthogonale . . . . .	223
7.2	Le théorème spectral . . . . .	224
7.2.1	Énoncé et conséquences . . . . .	224
7.2.2	Valeurs propres réelles des matrices symétriques $2 \times 2$ . . . . .	225
7.2.3	Exemples de diagonalisation orthogonale . . . . .	225
7.3	Décomposition spectrale . . . . .	227
7.4	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	231
7.4.1	Valeurs singulières . . . . .	231
7.4.2	Théorème de décomposition en valeurs singulières . . . . .	233
7.4.3	Méthode de calcul de la SVD . . . . .	234